

Elektronik 1, Foliensatz 7: Frequenzraum

G. Kemnitz

28. August 2023

Contents

1 Frequenzraum	1
1.1 Fouriertransformation	2
1.2 FFT/Matlab	6
1.3 komplexe U, I, R	9
1.4 Schaltung \Rightarrow Gleichungssystem	11
1.5 Handwerkszeug	13
1.6 Transistorverstärker	14
1.7 Operationsverstärker	19
1.8 Aufgaben	22

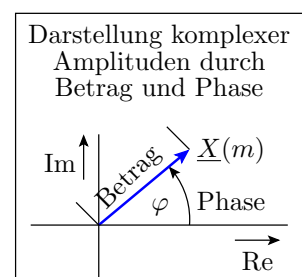
1 Frequenzraum

Frequenzraum, Spektrum

Funktionsraum, in dem ein periodisches Zeitsignal als Summe komplexer Exponentialfunktionen dargestellt wird:

$$x(t) = \sum_{m=-M}^M \underline{X}(m) \cdot e^{j \cdot m \cdot \omega_0 \cdot t}$$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_P}$	Grundkreisfrequenz
T_P	Signalperiode
$j = \sqrt{-1}$	imaginäre Einheit
$\underline{X}(m)$	komplexe Amplitude ¹
$m = f \cdot T_P$	Frequenzindex
f	Frequenz



Wozu Signaldarstellung im Frequenzraum?

- Im Frequenzbereich wird ein periodisches Zeitsignal $x(t)$ durch die komplexen Amplituden $\underline{X}(\omega)$ der summierten Zeitfunktionen $\underline{X}(\omega) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t}$ dargestellt.
- Die Umrechnung $x(t) \rightarrow \underline{X}(\omega)$ ist umkehrbar eindeutig.

- Die komplexen Spannungs- und Stromamplituden \underline{U} und \underline{I} sind nicht nur an R , sondern auch an C und L zueinander proportional.
- Lineare Systeme aus Quellen, R , C und L bilden sich auf ein lineares frequenzabhängiges Gleichungssystem ab.

Fact 1. Der Frequenzraum ist ein Mittel zur Beschreibung linearer Schaltungen mit zeitveränderlichen Quellen, R , C und L durch ein lineares Gleichungssystem statt durch ein DGL-System.

1.1 Fouriertransformation

Fouriertransformation

- Mathematische Grundlage der Signaldarstellung im Frequenzraum ist die Fouriertransformation.
- Eine Funktion $f(a)$ mit der Periode $2 \cdot \pi$ wird durch eine Fourierreihe

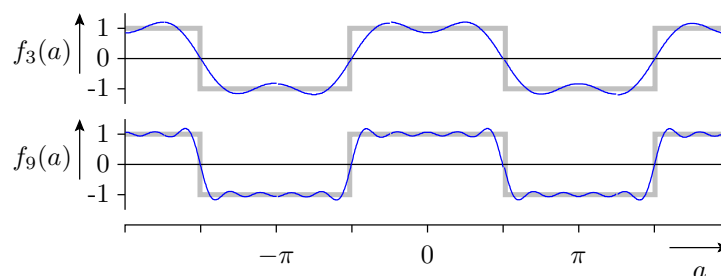
$$f_M(a) = \sum_{m=0}^M X_m \cdot \cos(m \cdot a + \varphi_m)$$

(X_m – Amplitude; φ_m – Phasenverschiebung) angenähert.

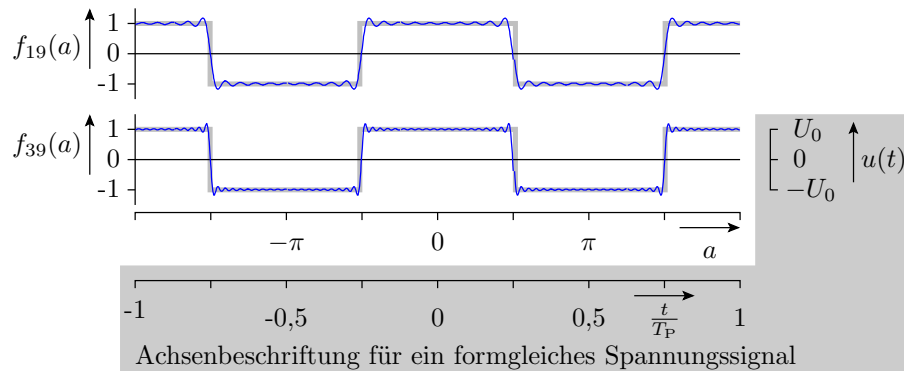
- Nichtperiodische Signale werden durch ein Signal mit unendlicher Periode angenähert.

Beispiel: Fourierreihe einer Rechteckfunktion

- $f_3(a) = \frac{4}{\pi} \cdot \left(\cos(a) - \frac{\cos(3 \cdot a)}{3} \right)$
- $f_9(a) = \frac{4}{\pi} \cdot \left(\cos(a) - \frac{\cos(3 \cdot a)}{3} + \frac{\cos(5 \cdot a)}{5} - \frac{\cos(7 \cdot a)}{7} + \frac{\cos(9 \cdot a)}{9} \right)$



- $f_M(a) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^M \sin\left(\frac{\pi \cdot m}{2}\right) \cdot \frac{\cos(m \cdot a)}{m}$



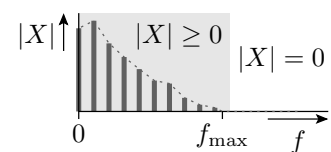
- Formgleiches Spannungssignal:

$$u(t) = \frac{4 \cdot U_0}{\pi} \cdot \sum_{m=1}^M \left(\underbrace{\sin\left(\frac{\pi \cdot m}{2}\right)}_{0, 1, 0, -1, \dots} \cdot \frac{1}{m} \cdot \cos(m \cdot \omega_0 \cdot t) \right)$$

($\omega_0 = \frac{2\pi}{T_P}$ – Grundkreisfrequenz; T_P – Signalperiode).

Bandbegrenzung

Band: Frequenzbereich
 bandbegrenzt: $|X_m| = 0$ für $\frac{m}{T_P} > f_{\max}$

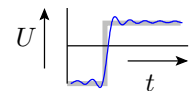


Summationsgrenze: $M < f_{\max} \cdot T_P$

Fakt 2. Die Spannungen und Ströme in realen Schaltungen sind bandbegrenzt oder werden als bandbegrenzt angenähert.

- u_C und i_L können sich nur stetig ändern.
- Eingebaute und unvermeidliche parasitäre C und L bewirken Bandbegrenzung.
- Bandbegrenzter Sprung:

– Sprung abzüglich der Kosinusterme der Frequenzen $\frac{m}{T_P} > f_{\max}$



Übergang zur komplexen Exponentialfunktion

- Zusammenfassung (X_m, φ_m) zu einer komplexen Zahl \underline{X}_m

Definition der komplexen e-Funktion:	$e^{ja} = \cos(a) + j \cdot \sin(a)$ $e^{-ja} = \cos(a) - j \cdot \sin(a)$
umgestellt nach $\cos(a)$	$\cos(a) = \frac{1}{2} \cdot (e^{ja} + e^{-ja})$

- Ersatz der Kosinusterme für $m \neq 0$:

$$X_m \cdot \cos(m \cdot \omega_0 \cdot t + \varphi_m) = \underline{X}(m) \cdot e^{j \cdot m \cdot \omega_0 \cdot t} + \underline{X}(-m) \cdot e^{-(j \cdot m \cdot \omega_0 \cdot t)}$$

$$\text{mit } \underline{X}(m) = \frac{X_m}{2} \cdot e^{j \cdot \varphi_m} \text{ und } \underline{X}(-m) = \frac{X_m}{2} \cdot e^{-j \cdot \varphi_m}$$

- Fourierreihe mit komplexen e-Funktionen:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{m=-M}^M \underline{X}(m) \cdot e^{j \cdot m \cdot \omega_0 \cdot t} \\ &= \underline{X}(0) + \sum_{m=1}^M (2 \cdot |\underline{X}(m)| \cdot \cos(m \cdot \omega_0 \cdot t + \text{Phase}(\underline{X}(m)))) \end{aligned}$$

Fourierreihe mit komplexen e-Funktionen

$$x(t) = \sum_{m=-M}^M \underline{X}(m) \cdot e^{j \cdot m \cdot \omega_0 \cdot t}$$

- (M – Frequenzindex des Signalanteils mit der höchsten auftretenden Frequenz) neue Summationsgrenzen:

$$-M \leq m \leq M$$

- Die komplexen Amplituden der negativen Frequenzen $\neq 0$ sind die konjugiert komplexen Amplituden der positiven Frequenzen und betragsmäßig halb so groß wie die Amplituden der Kosinusterme:

$$\underline{X}(m) = \frac{X_m}{2} \cdot e^{j \cdot \varphi_m} \text{ und } \underline{X}(-m) = \frac{X_m}{2} \cdot e^{-j \cdot \varphi_m}$$

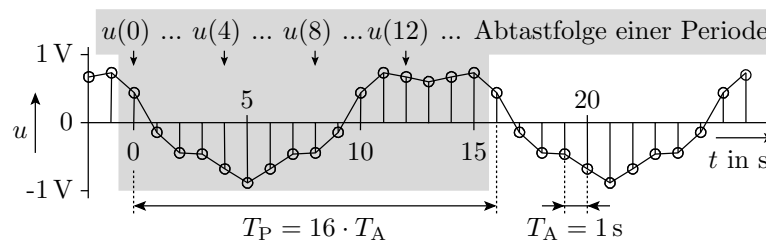
- der Gleichanteil bleibt:

$$\underline{X}(0) = X_0$$

Zeitdiskrete Fouriertransformation

Umkehrbarer Algorithmus zur Berechnung von

- N komplexen Amplituden eines **bandbegrenzten** Signals aus
- N **äquidistanten** Abtastwerten einer **Signalperiode**



(T_P – Signalperiode, T_A – Abtastintervall).

- Die Anzahl der Abtastpunkte N sei geradzahlig, im Idealfall eine Zweierpotenz (siehe später `fft()`).
- Voraussetzung ist die Einhaltung des Abtasttheorems.

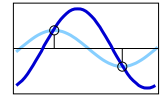
Abtasttheorem

Der Signalanteil mit der höchsten Frequenz muss mehr als zweimal je Periode abgetastet werden:

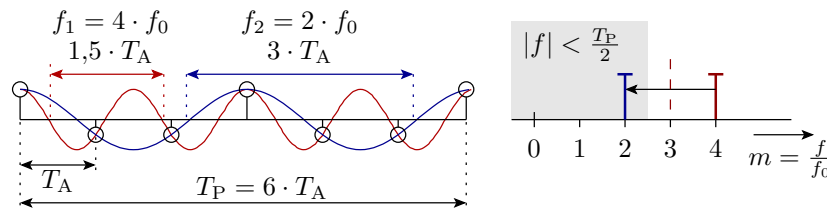
$$N > 2 \cdot M$$

Bei Verletzung des Abtasttheorems

- sind im Grenzfall $N = 2 \cdot M$ Amplitude und Phase des Signalanteils mit der höchsten Frequenz nicht eindeutig festgelegt.



- Für $N < 2 \cdot M$ gibt es ein Kosinussignal mit geringerer Frequenz mit derselben Abtastfolge (Aliasing):



Ausgangspunkt für die Herleitung der Fouriertransformation ist die Fourierreihe eines bandbegrenzten Signals:

$$x(t) = \sum_{m=-M}^M \underline{X}(m) \cdot e^{j \cdot m \cdot \omega_0 \cdot t}$$

Abtastzeitpunkte:	$t_n = \frac{n \cdot T_P}{N}$
Grundkreisfrequenz:	$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_P}$
Exponent:	$m \cdot \omega_0 \cdot t_n = \frac{2\pi \cdot m \cdot n}{N}$
Abtasttheorem:	$ m \leq M < \frac{N}{2}$

- Indexerweiterung um $m = -\frac{N}{2}$ mit $\underline{X}(-\frac{N}{2}) = 0$ zur Angleichung der Anzahl der Zeit- und Frequenzwerte.
- Signalwerte zu den Abtastzeitpunkten $t_n = n \cdot T_A$:

$$x(t_n) = x(n) = \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \underline{X}(m) \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi \cdot m \cdot n}{N}}$$

- Die Berechnung von N Zeitwerten $x(n)$ aus N Frequenzwerten $\underline{X}(m)$ erfolgt über die Lösung eines linearen Gleichungssystems aus N Gleichungen mit N Unbekannten:

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix} = Q \cdot \begin{pmatrix} \underline{X}(-\frac{N}{2}) = 0 \\ \underline{X}(-\frac{N}{2} + 1) \\ \vdots \\ \underline{X}(\frac{N}{2} - 1) \end{pmatrix}$$

Q $-N \times N$ -Matrix mit den komplexen Koeffizienten:

$$q_{mn} = e^{j \cdot \frac{2\pi \cdot m \cdot n}{N}}$$

Die Determinante $\det(Q)$ ist ungleich null. Damit ist die Transformation umkehrbar.

Berechnung der komplexen Amplituden aus der Abtastfolge:

$$\begin{pmatrix} \underline{X}(-\frac{N}{2}) \\ \underline{X}(-\frac{N}{2} + 1) \\ \vdots \\ \underline{X}(\frac{N}{2} - 1) \end{pmatrix} = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix}$$

\mathbf{Q}^{-1} $-N \times N$ -Matrix mit den komplexen Koeffizienten:

$$q_{mn} = \frac{1}{N} \cdot e^{-j \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot m \cdot n}{N}}$$

Fakt 3. Die Berechnung der komplexen Amplituden für eine Abtastfolge eines bandbegrenzten Signals erfolgt über die Lösung eines linearen Gleichungssystems.

Praktische Berechnung:

- FFT (**F**ast **F**ourier **T**ransformation) und
- IFFT (**I**nverse **F**ast **F**ourier **T**ransformation).

1.2 FFT/Matlab

Von der Matrixmultiplikation zur FFT

- Zirkulare Verschiebung der Frequenzindizes der negativen Frequenzen um N in den positiven Bereich:

$$x(n) = \underbrace{\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} \underline{X}(m) \cdot e^{j \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot m \cdot n}{N}}}_{\text{für } 0 \leq m < \frac{N}{2} \text{ (positive Freq.)}} + \underbrace{\sum_{m=\frac{N}{2}}^{N-1} \underline{X}(m-N) \cdot e^{j \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot (m-N) \cdot n}{N}}}_{\text{für } -\frac{N}{2} \leq m < 0 \text{ (negative Freq.)}}$$

Der hinzukommende Faktor $e^{-j \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot N \cdot n}{N}}$ ist eins und entfällt.

- Mit $\underline{X}(m-N) = \underline{X}(m)$ bleibt die Gleichheit erhalten. Die Transformationsvorschrift mit dem zirkular verschobenen Spektralvektor

$$x(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \underline{X}(m) \cdot e^{j \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot m \cdot n}{N}}$$

mit $\underline{X}(m) = \underline{X}(m-N)$ für $m \geq \frac{N}{2}$ liefert dieselbe Zeitfolge.

- Darstellung der Exponentialterme als Potenzen der Hilfsvariablen

$$v = e^{j \cdot \frac{2 \cdot \pi}{N}}$$

Ergebnis:

$$x(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \underline{X}(m) \cdot v^{m \cdot n}$$

- Aus historischen Gründen wird statt der komplexen Amplituden der N -fache Wert berechnet:

$$\underline{W}(m) = N \cdot \underline{X}(m)$$

Die inverse zeitdiskrete Fouriertransformation (IFFT) berechnet die Abtastfolge aus den N -fachen komplexen Amplituden mit den um N in den positiven Bereich verschobenen Frequenzindizes der negativen Frequenzen:

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix} = V \cdot \begin{pmatrix} \underline{W}(0) \\ \underline{W}(1) \\ \vdots \\ \underline{W}(N-1) \end{pmatrix}$$

mit:

$$V = \frac{1}{N} \cdot \begin{pmatrix} v^0 & v^1 & \dots & v^{N-1} \\ v^0 & v^2 & \dots & v^{2 \cdot (N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v^0 & v^{N-1} & \dots & v^{(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

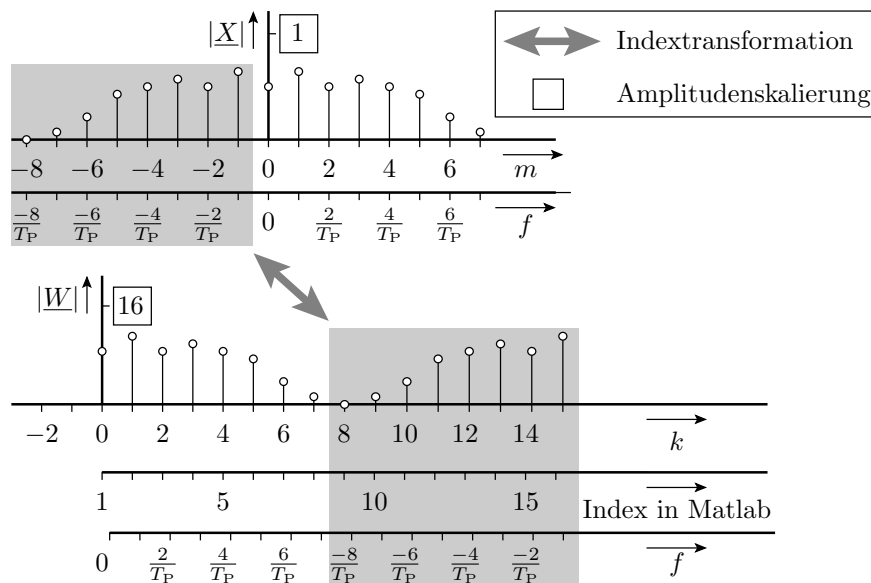
Die zeitdiskrete Fouriertransformation ist die inverse Operation (Umkehrung) davon:

$$\begin{pmatrix} \underline{W}(0) \\ \underline{W}(1) \\ \vdots \\ \underline{W}(N-1) \end{pmatrix} = N \cdot V^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{pmatrix}$$

mit:

$$N \cdot V^{-1} = \begin{pmatrix} v^0 & v^{-1} & \dots & v^{-(N-1)} \\ v^0 & v^2 & \dots & v^{-2 \cdot (N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v^0 & v^{-(N-1)} & \dots & v^{-(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

Transformationsergebnis \Leftrightarrow Spektrum



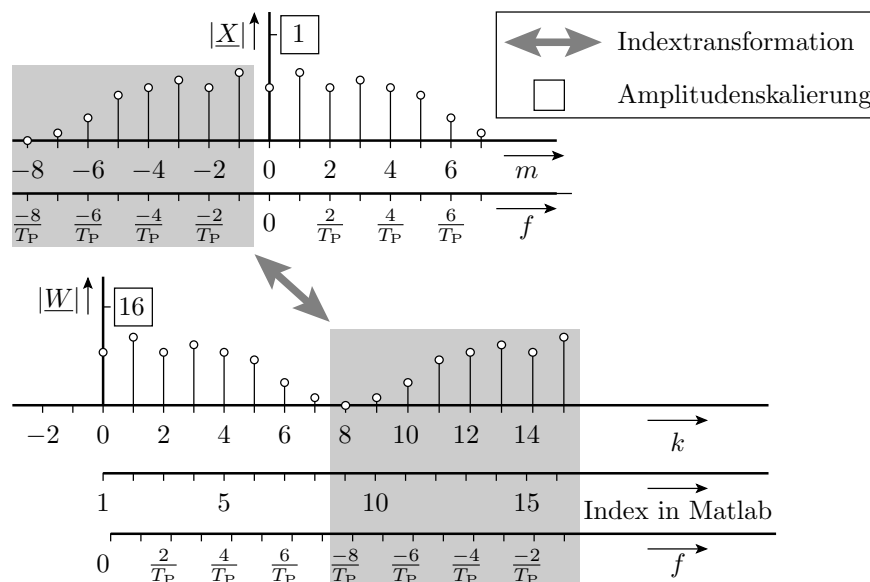
Schnelle Fouriertransformation (FFT)

- Die FFT (Fast Fourier Transformation) ist ein Algorithmus, der durch geschicktes Ausklammern die Anzahl der komplexen Multiplikationen und Additionen von N^2 auf im günstigsten Fall $N \cdot \log_2(N)$ reduziert².
- Für die IFFT (Inverse Fast Fourier Transformation) gilt dasselbe, nur mit inverser Transformationsmatrix.
- Matlab-Funktionen:

```
W=fft(x); % fast fourier transformation
x=ifft(W); % inverse fast fourier transformation
```

(x – Abtastfolge; W – transformierter Frequenzvektor).

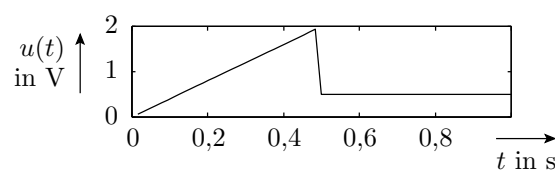
- In Matlab beginnt die Indexzählung mit Eins:



Beispiel für die Berechnung und Darstellung eines Spektrums

- Eingabe und Darstellung der Abtastfolge des Zeitsignals

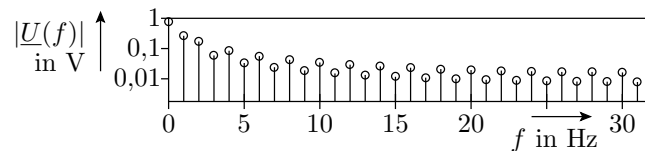
```
TP = 1; % Periodendauer in s
N = 2^6; % Abtastwerte je Periode
u = [ ... ]; % Vorgabe der N Abtastwerte
t = (0:N-1)*TP/N; % Folge der N Zeitwerte
subplot(3,1,1);
plot(t,u); % Darstellung Zeitfunktion
```



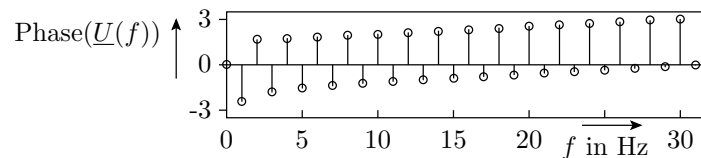
²Der günstigste Fall ist, wenn N eine Zweierpotenz ist. Die bevorzugten Werte für die Anzahl der Abtastpunkte sind entsprechend 16, 32, 64, 128, 256, 1024, ...

- Berechnung und Darstellung des Spektrums

```
U = fft(u)/N;      % Berechnung des Spektrums
f = (0:N/2-1)/TP; % Vektor positive Frequenzen
subplot(3,1,2);   % Betrag der kompl. Amplituden
stem(f,abs(U(1:N/2)));
```



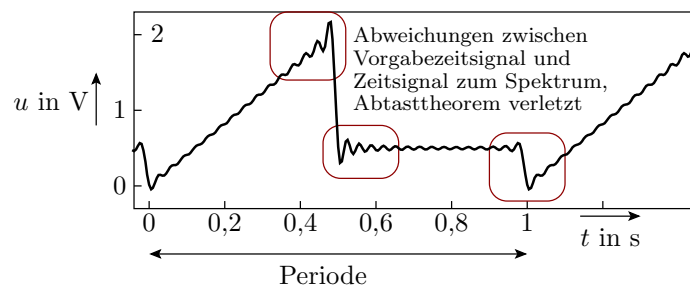
```
subplot(3,1,3);   % Phasenverschiebung
stem(f,angle(U(1:N/2))); % der kompl. Amplituden
```



Wurde das Abtasttheorem eingehalten?

- Zeitfunktion für 300 statt 64 Abtastwerten je Periode:

```
for n=1:300;      % für 300 Zeitwerte
    t(n)=(n-10)/200;% Abtastzeitpunkte festlegen
    u(n) = U(1);   % mit Gleichanteil initialisieren
    for m=2:32     % für die 31 Spetralwerte mit f>0
        u(n)=u(n)+2*real(U(m)*e^(j*2*pi*f(m)*t(n)));
    end;
end;
plot(t, u);
```



1.3 komplexe U , I , R

Komplexe Spannungen und Ströme

- Die folgende Theorie basiert auf dem Überlagerungssatz und gilt nur für lineare Systeme.
- In linearen Systemen können alle periodischen Quellenwerte in eine Summe komplexer Exponentialterme vom Typ

$$u(t) = \underline{U}(\omega) \cdot e^{j\omega t}$$

$$i(t) = \underline{I}(\omega) \cdot e^{j\omega t}$$

($\underline{U}(\omega)$ – komplexe Spannung; $\underline{I}(\omega)$ – komplexer Strom; ω – Kreisfrequenz) zerlegt und die Berechnung der gesuchten Ströme und Spannungen für jede Kreisfrequenz ω extra durchgeführt werden.

- Die Gesamtströme und -spannungen sind dann die Summe der Ströme und Spannungen für jede Kreisfrequenz ω , für die die berechneten komplexen Ströme bzw. Spannungen ungleich null sind.

Komplexer Widerstand $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$

Widerstand: $u = R \cdot i$:

$$\begin{aligned}\underline{U} \cdot e^{j\omega t} &= R \cdot \underline{I} \cdot e^{j\omega t} \\ \underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} &= R\end{aligned}$$

Kapazität: $i = C \cdot \frac{du}{dt}$:

$$\begin{aligned}\underline{I} \cdot e^{j\omega t} &= C \cdot \underline{U} \cdot \frac{d(e^{j\omega t})}{dt} = j\omega C \cdot \underline{U} \cdot e^{j\omega t} \\ \underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} &= \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}\end{aligned}$$

Induktivität: $u = L \cdot \frac{di}{dt}$:

$$\begin{aligned}\underline{U} \cdot e^{j\omega t} &= L \cdot \underline{I} \cdot \frac{d(e^{j\omega t})}{dt} = j\omega L \cdot \underline{I} \cdot e^{j\omega t} \\ \underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} &= j\omega L\end{aligned}$$

Zeigerdarstellung

Komplexe Spannungen, Ströme und Widerstände besitzen einen Betrag und eine Phase und lassen sich als Zeiger in der komplexen Ebene darstellen. Für den komplexen Widerstand:

$$|\underline{Z}| \cdot e^{j\varphi_Z} = \frac{|\underline{U}| \cdot e^{j\varphi_U}}{|\underline{I}| \cdot e^{j\varphi_I}}$$

ist der Betrag

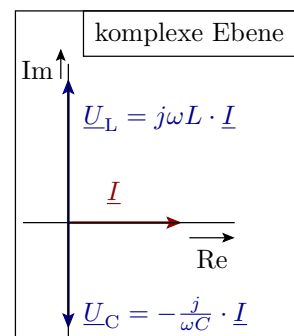
$$|\underline{Z}| = \frac{|\underline{U}|}{|\underline{I}|}$$

und beträgt die Phasenverschiebung:

$$\varphi_Z = \varphi_U - \varphi_I$$

An der Kapazität ist die Spannung zum Strom um $\pi/2$ verzögert.

An der Induktivität eilt die Spannung dem Strom um $\pi/2$ voraus.



Gibt es wirklich imaginäre Spannungen und Ströme?

- Für die Spektralanteile der einzelnen positiven und negativen Frequenzen ja, in einem reellen Signal jedoch nicht.

Warum?

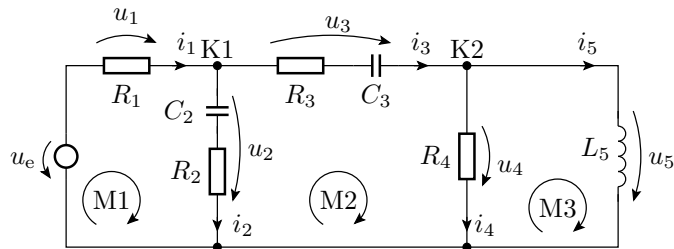
- Weil ein reelles Zeitsignal zu jedem Summanden $|\underline{X}| \cdot e^{j\omega t + \varphi}$ die konjugiert komplexe Zeitfunktion $|\underline{X}| \cdot e^{-(j\omega t + \varphi)}$ enthält. Die Summe beider

$$\begin{aligned}
 & |\underline{X}| \cdot e^{j\omega t + \varphi} + |\underline{X}| \cdot e^{-(j\omega t + \varphi)} = \\
 & |\underline{X}| \cdot (\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)) \\
 & + |\underline{X}| \cdot (\cos(-(\omega t + \varphi)) + j \sin(-(\omega t + \varphi))) \\
 & = 2 \cdot |\underline{X}| \cdot \cos(\omega t + \varphi)
 \end{aligned}$$

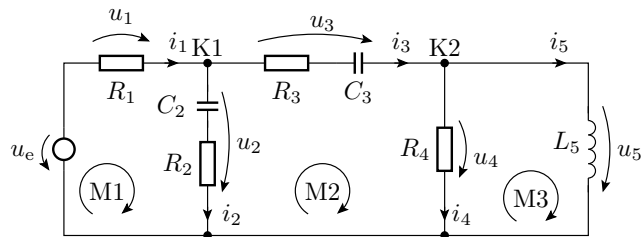
reell ist.

1.4 Schaltung \Rightarrow Gleichungssystem

Kirchhoffsche Sätze für komplexe \underline{U} und \underline{I}



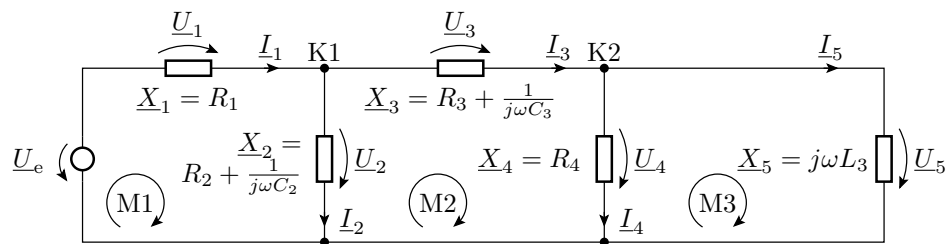
$$\begin{aligned}
 \text{K1:} \quad & i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\
 \text{K2:} \quad & i_3 - i_4 - i_5 = 0 \\
 \text{M1:} \quad & u_1 + u_2 = u_e \\
 \text{M2:} \quad & -u_2 + u_3 + u_4 = 0 \\
 \text{M3:} \quad & -u_4 + u_5 = 0
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 i_1 &= \underline{I}_1 \cdot e^{j\omega t} \\
 \dots & \dots \dots \\
 i_5 &= \underline{I}_5 \cdot e^{j\omega t} \\
 u_1 &= \underline{U}_1 \cdot e^{j\omega t} = R_1 \cdot \underline{I}_1 \cdot e^{j\omega t} \\
 u_2 &= \underline{U}_2 \cdot e^{j\omega t} = \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right) \cdot \underline{I}_2 \cdot e^{j\omega t} \\
 u_3 &= \underline{U}_3 \cdot e^{j\omega t} = \left(R_3 + \frac{1}{j\omega C_3} \right) \cdot \underline{I}_3 \cdot e^{j\omega t} \\
 u_4 &= \underline{U}_4 \cdot e^{j\omega t} = R_4 \cdot \underline{I}_4 \cdot e^{j\omega t} \\
 u_5 &= \underline{U}_5 \cdot e^{j\omega t} = j\omega L_5 \cdot \underline{I}_5 \cdot e^{j\omega t} \\
 u_e &= \underline{U}_e \cdot e^{j\omega t}
 \end{aligned}$$

Der zeitabhängige Term $e^{j\omega t}$ kürzt sich aus allen Gleichungen heraus.

Die kirchhoffschen Sätze gelten auch für die komplexen Spannungen und Ströme:



$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ R_1 & \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right) & \left(R_3 + \frac{1}{j\omega C_3}\right) & R_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_4 & j\omega L_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U_e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zusammenfassung

- Die Schaltungsanalyse im Frequenzbereich erfolgt nach demselben Formalismus wie für den stationären Zustand, nur dass die Spannungen, Ströme und Widerstände durch die komplexen Spannungen, Ströme und Widerstände ersetzt sind.

Schaltungsanalyse für periodische Eingabesignale:

- Eingabezeitsignal \Rightarrow Abtastfolge.
- Berechnung des Spektrums aus der Abtastfolge.
- Wiederhole für alle Frequenzen des Spektrums³:
 - Berechnung der gesuchten komplexen Ströme und Spannungen.
- Rücktransformation der Ergebnisspektren in Zeitfolgen.

Stationärer Betrieb als Sonderfall $\omega=0$

- Basisfunktion:

$$e^{j \cdot 0 \cdot t} = 1$$

- komplexe Spannung \Rightarrow stationäre Spannung:

$$\underline{U} \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot 0 \cdot t} = U$$

- komplexer Strom \Rightarrow stationärer Strom:

$$\underline{I} \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot 0 \cdot t} = I$$

- Induktivität \Rightarrow Verbindung:

$$\underline{X}_L = j \cdot 0 \cdot L = 0$$

- Kapazität \Rightarrow Unterbrechung

$$\underline{X}_C = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} \rightarrow \infty$$

Die Schaltungsanalyse für den stationären Betrieb entspricht im Frequenzbereich dem Sonderfall $\omega = 0$ (bzw. $m = 0$).

³Eine zeitdiskreten Analyse wiederholt die Lösung des Gleichungssystems für alle Abtastzeitpunkte. Rechenaufwand vergleichbar hoch.

1.5 Handwerkszeug

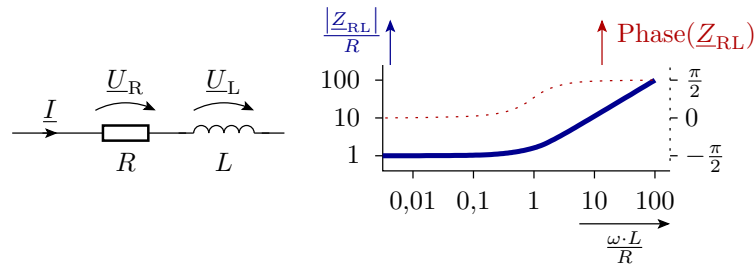
Schaltungsumformungen und Vereinfachungen

Aus der Gültigkeit der kirchhoffschen Sätze für die komplexen Spannungen und Ströme folgt, dass auch der gesamte Werkzeugkasten für die Schaltungsanalyse auf die Schaltungsmodellierung mit komplexen Spannungen und Strömen übertragbar ist.

Zusammenfassen komplexer Widerstände

- Reihenschaltung

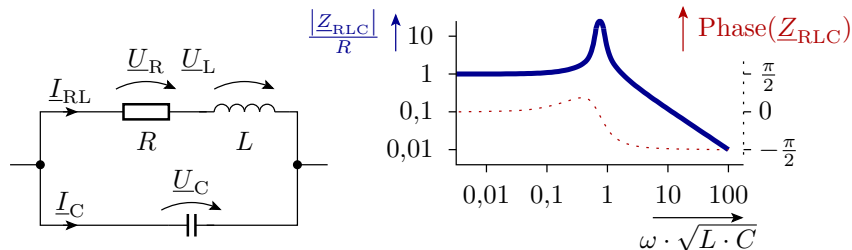
$$\frac{U_{\text{ges}}}{I} = Z_{\text{ges}} = \frac{U_1}{I} + \frac{U_2}{I} = Z_1 + Z_2$$



$$Z_{RL} = R + j \cdot \omega \cdot L$$

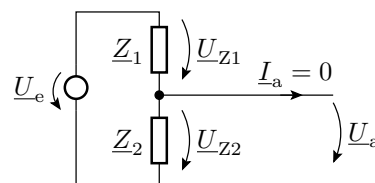
- Parallelschaltung

$$\frac{I_{\text{ges}}}{U} = \frac{1}{Z_{\text{ges}}} = \frac{I_1}{U} + \frac{I_2}{U} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$



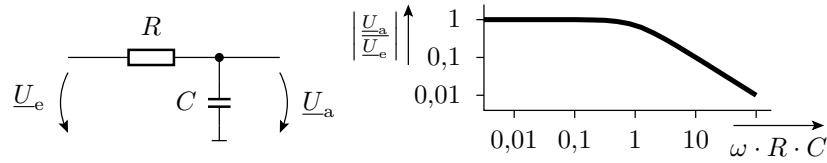
$$\begin{aligned} Z_{RLC} &= Z_{RL} \parallel Z_C = \frac{1}{\frac{1}{R+j\omega\cdot L} + j\omega\cdot C} \\ &= \frac{R + j\omega\cdot L}{1 + j\omega\cdot R\cdot C - \omega^2\cdot L\cdot C} \end{aligned}$$

Spannungsteiler



$$U_a = U_e \cdot \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Frequenzgang eines RC-Glieds

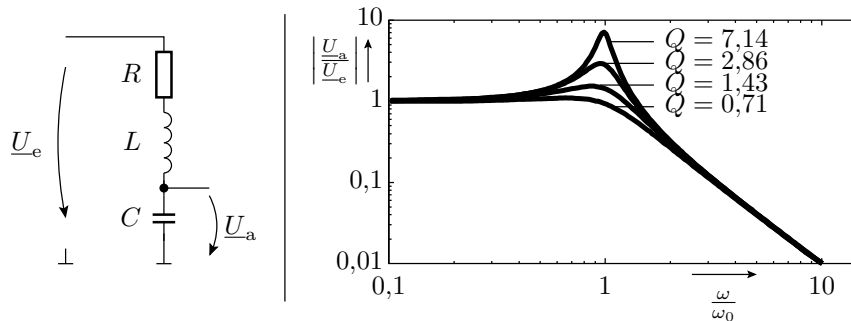


- $\underline{Z}_1 = R$ und $\underline{Z}_2 = \frac{1}{j\omega C}$:

$$\underline{U}_a = \underline{U}_e \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\underline{U}_e}{1 + j \cdot \omega \cdot R \cdot C}$$

Für niedrige Frequenzen ist die Ausgangsspannung gleich der Eingangsspannung. Für hohe Frequenzen nimmt ihr Betrag umgekehrt proportional mit der Frequenz ab.

RLC-Spannungsteiler



$$\underline{U}_a = \underline{U}_e \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \underline{U}_e \cdot \frac{1}{1 + j \cdot \frac{\omega}{Q \cdot \omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (1)$$

$Q = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$ – Güte, $\omega_0 = 1/\sqrt{L \cdot C}$ – Resonanzfrequenz. Mit $Q \approx 1$ ist das ein Tiefpass und mit $Q \gg 1$ ein Bandpass.

1.6 Transistorverstärker

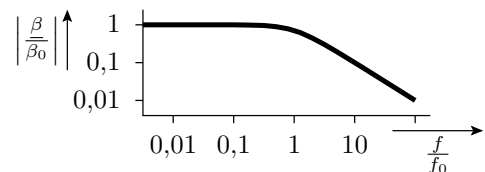
Der Frequenzgang der Stromverstärkung

Die Verstärkung eines Bipolartransistors hat eine vergleichbare Frequenzabhängigkeit wie die Übertragungsfunktion eines RC-Glieds:

$$\underline{\beta} = \beta_0 \cdot \frac{1}{1 + j \cdot \frac{f}{f_0}}$$

β_0 – Grundverstärkung

f_0 – Grenzfrequenz



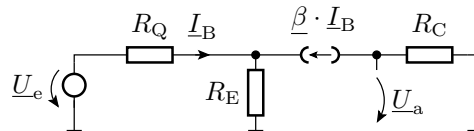
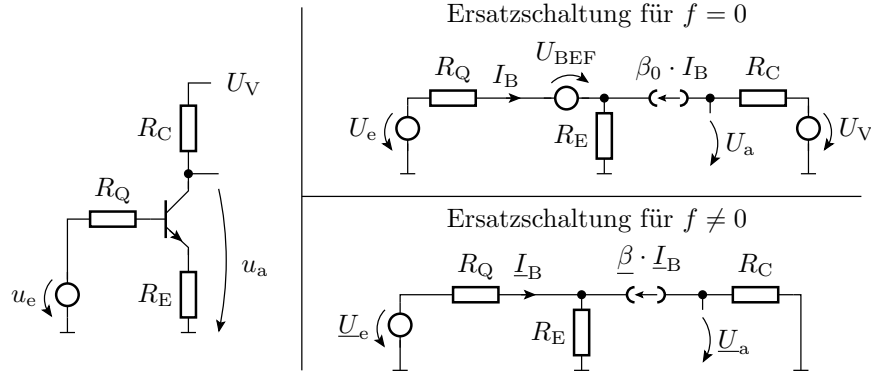
Für hohe Frequenzen $f \gg f_0$:

$$\underline{\beta} \approx \beta_0 \cdot \frac{1}{j \cdot \frac{f}{f_0}} = -j \cdot \frac{\beta_0 \cdot f_0}{f} = -j \cdot \frac{f_T}{f}$$

$f_T = \beta_0 \cdot f_0$ – Transitfrequenz (Frequenz für $|\underline{\beta}| = 1$).

Der Frequenzgang der Verstärkung eines Verstärkers

- Beim Aufbau eines Transistorverstärkers wird die Verstärkung der Gesamtschaltung mit externen Widerständen eingestellt.
- Dabei gilt tendenziell: Verstärkung \downarrow Grenzfrequenz \uparrow



$$\begin{aligned}
 \underline{U}_e &= (R_Q + R_E \cdot (1 + \underline{\beta})) \cdot \underline{I}_B \\
 \underline{U}_a &= -R_C \cdot \underline{\beta} \cdot \underline{I}_B \\
 &= -\frac{R_C \cdot \underline{\beta} \cdot \underline{U}_e}{R_Q + R_E \cdot (1 + \underline{\beta})} \\
 &= -\frac{R_C \cdot \underline{U}_Q}{(R_Q + R_E) \cdot \frac{1}{\underline{\beta}} + R_E} \\
 \frac{1}{\underline{\beta}} &= \frac{1}{\beta_0} + \frac{j \cdot f}{f_T}
 \end{aligned}$$

$$\underline{U}_a = -\frac{R_C \cdot \underline{U}_e}{(R_Q + R_E) \cdot \left(\frac{1}{\beta_0} + \frac{j \cdot f}{f_T}\right) + R_E} = \frac{v_{U0} \cdot \underline{U}_e}{1 + \frac{j \cdot f}{f_{V0}}} \quad (2)$$

Für niedrige Frequenzen beträgt die Verstärkung:

$$v_{U0} = -\frac{R_C}{(R_Q + R_E) \cdot \frac{1}{\beta_0} + R_E} \approx -\frac{R_C}{R_E}$$

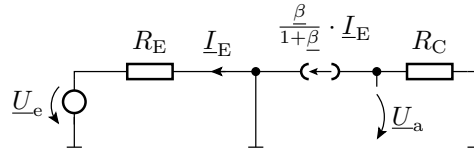
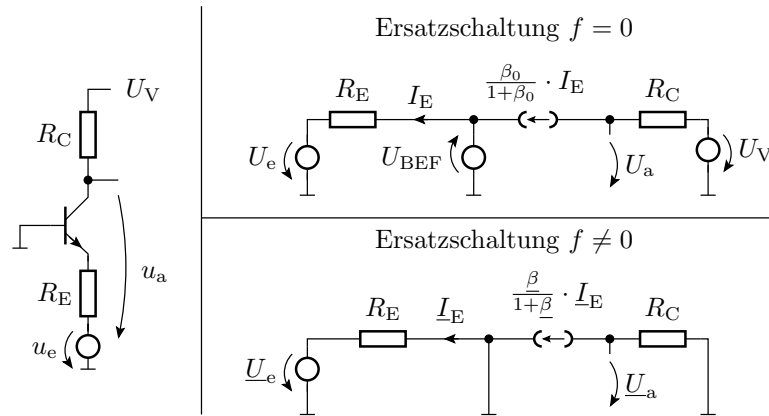
Die Grenzfrequenz der Spannungsverstärkung f_{V0} , bei der die Verstärkung auf das $v_{U0}/\sqrt{2}$ abgesunken ist, beträgt:

$$f_{V0} = \frac{f_T \cdot \left((R_Q + R_E) \cdot \frac{1}{\beta_0} + R_E\right)}{(R_Q + R_E)} \approx f_T \cdot \frac{R_E}{R_Q + R_E}$$

Für einen Quellenwiderstand $R_Q \ll R_E$ ist die Grenzfrequenz der Spannungsverstärkung nahezu die Transitfrequenz f_T der Stromverstärkung des Transistors. Für eine hochohmige Quelle ist die Grenzfrequenz wesentlich geringer.

Basisschaltung

- Die Basis liegt (für $f \neq 0$) auf dem Bezugspotenzial.
- Transistorverstärker für hohe Frequenzen und Bandbreiten.



$$\underline{I_E} = -\frac{\underline{U_e}}{R_E}$$

$$\underline{U_a} = -\frac{\beta \cdot R_C \cdot \underline{I_E}}{1 + \beta} = \frac{R_C \cdot \underline{U_e}}{R_E \cdot \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}$$

$$\underline{U_a} = \frac{R_C \cdot \underline{U_e}}{R_E \cdot \left(1 + \frac{1}{\beta_0} + \frac{j \cdot f}{f_T}\right)} \approx \frac{R_C \cdot \underline{U_e}}{R_E \cdot \left(1 + \frac{j \cdot f}{f_T}\right)} = \frac{v_{U0} \cdot \underline{U_e}}{1 + \frac{j \cdot f}{f_{V0}}}$$

Die Verstärkung für niedrige Frequenzen beträgt:

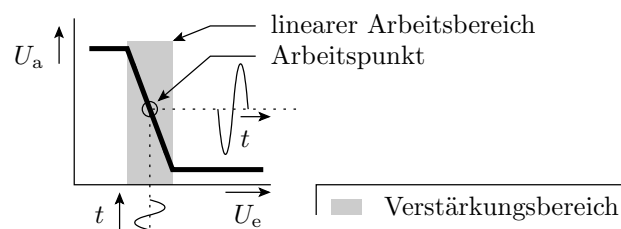
$$v_{U0} \approx R_C/R_E$$

Die Grenzfrequenz der Spannungsverstärkung f_{V0} (für $v_{V0}/\sqrt{2}$) ist etwa die Transitfrequenz der Stromverstärkung:

$$f_{V0} \approx f_T$$

Arbeitspunkt

- Der Arbeitspunkt beschreibt die Spannungen und Ströme im stationären Zustand.
- Der Transistor muss für den gesamten nutzbaren Ein- und Ausgangsspannungsbereich im Normalbereich arbeiten.
- Für einen großen Ein- und Ausgangsspannungsbereich ist der Arbeitspunkt etwa in der Mitte des Verstärkungsbereichs zu legen.

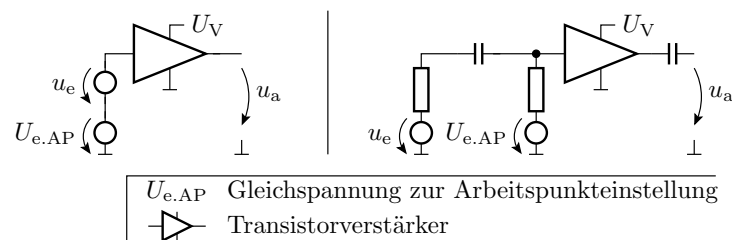


Einstellung des Arbeitspunktes:

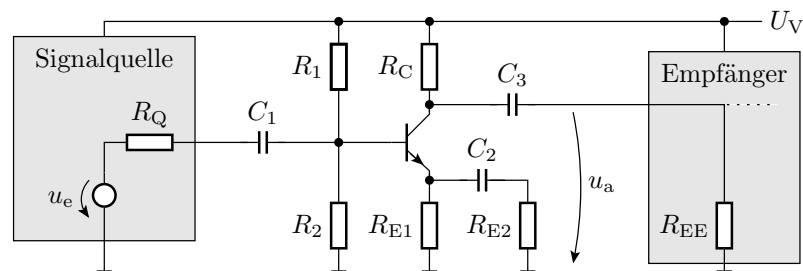
- über den Gleichanteil der Eingangsspannung u_e oder
- eine Gleichspannungsquelle in Reihe zur Eingangssignalquelle.

Alternative:

- Nur Spektralanteile mit einer Frequenz $f \geq f_u$ verstärken (f_u – minimale Nutzfrequenz).
- Der Frequenzbereich darunter und der stationäre Betrieb werden für die Einstellung des Arbeitspunkts genutzt.
- Trennung von Gleichanteil und Nutzsignal mit RC-Gliedern.

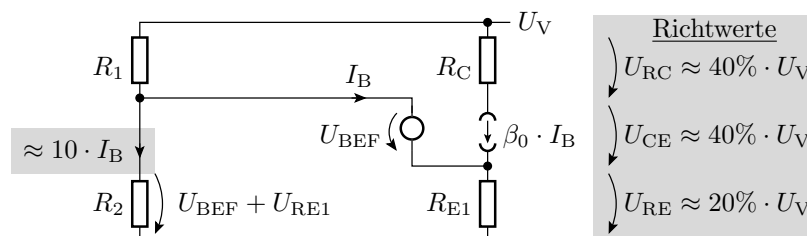


Typischer Signalverstärker



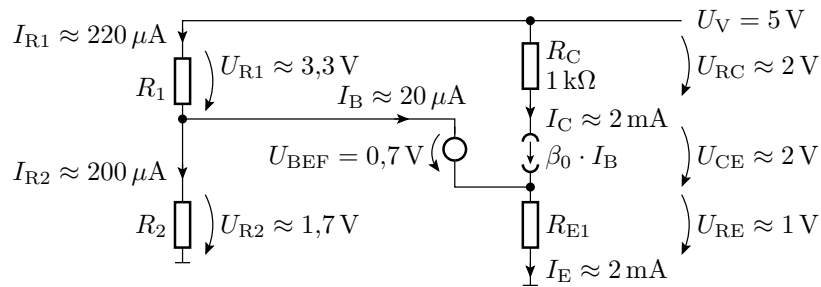
- Für die Arbeitspunkteinstellung (stationärer Zustand) sind die Kapazitäten Unterbrechungen. Mit dieser Ersatzschaltung werden R_1 , R_2 , R_{E1} und R_C geeignet festgelegt.
- Im Frequenzbereich des Nutzsignals sind alle Z_C vernachlässigbar klein. Mit dieser Ersatzschaltung werden C_1 bis C_3 und R_{E2} festgelegt.

Arbeitspunkteinstellung



Beispiel:

- gegeben: $U_V = 5\text{ V}$, $\beta_0 \approx 100$, $U_{BEF} \approx 0,7\text{ V}$ und $R_C = 1\text{ k}\Omega$
- gesucht: R_{E1} , R_1 und R_2

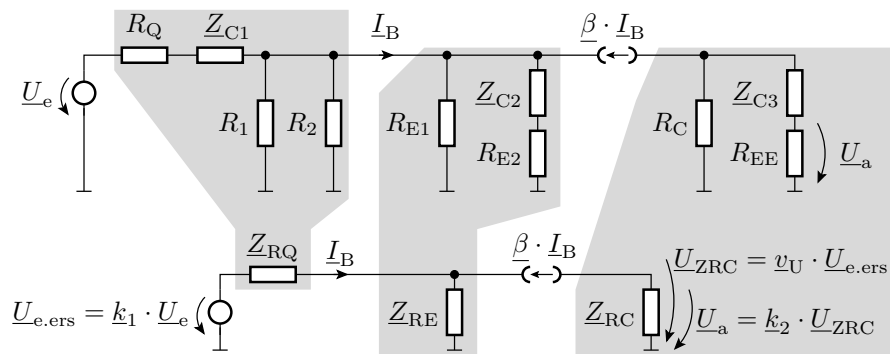


$$R_{E1} \approx \frac{1 \text{ V}}{2 \text{ mA}} \approx 500 \Omega$$

$$R_1 \approx \frac{3,3 \text{ V}}{220 \mu\text{A}} \approx 15 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 \approx \frac{1,7 \text{ V}}{200 \mu\text{A}} \approx 8,6 \text{ k}\Omega$$

Ersatzschaltung im genutzten Frequenzbereich



Ersatzschaltungsparameter:

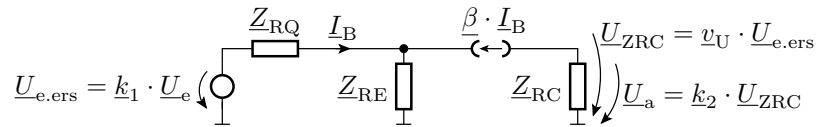
$$Z_{RQ} = \left(R_Q - \frac{j}{\omega \cdot C_1} \right) \parallel R_1 \parallel R_2$$

$$k_1 = \frac{R_1 \parallel R_2}{(R_1 \parallel R_2) + R_Q - \frac{j}{\omega \cdot C_1}}$$

$$Z_{RE} = \left(R_{E2} - \frac{j}{\omega \cdot C_2} \right) \parallel R_{E1}$$

$$Z_{RC} = \left(R_{EE} - \frac{j}{\omega \cdot C_3} \right) \parallel R_C$$

$$k_2 = \frac{R_{EE}}{R_{EE} + Z_{C3}} = \frac{j\omega \cdot C_3 \cdot R_{EE}}{j\omega \cdot C_3 \cdot R_{EE} + 1}$$

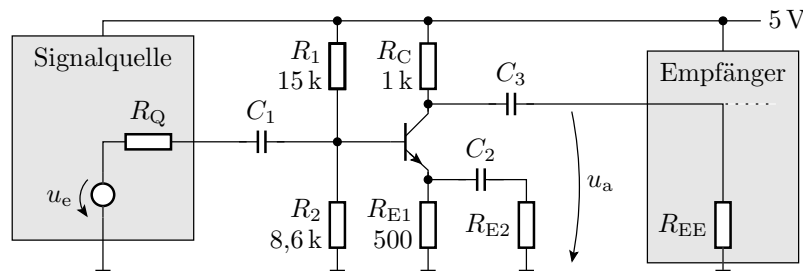


Die Spannungsverstärkung dieser Ersatzschaltung wurde bereits auf Seite 15 in Gl. 2 hergeleitet:

$$\underline{v}_U = \frac{U_{ZRC}}{U_{e.ers}} = \frac{-Z_{RC}}{(Z_{RQ} + Z_{RE}) \cdot \left(\frac{1}{\beta_0} + \frac{j \cdot f}{f_g}\right) + Z_{RE}} \xrightarrow{f \ll f_g} \approx -\frac{Z_{RC}}{Z_{RE}}$$

Die gesamte Verstärkung ist um die beiden Spannungsteilverhältnisse kleiner:

$$\underline{v}_{U.ges} = \frac{U_a}{U_e} = k_1 \cdot k_2 \cdot \underline{v}_U \xrightarrow{f \ll f_g} \approx -k_1 \cdot k_2 \cdot \frac{Z_{RC}}{Z_{RE}}$$



Weitere Entwurfsschritte (am einfachsten mit Matlab oder einem Simulator durch Probieren):

- Mit R_{E2} gewünschte Spannungsverstärkung einstellen.
- C_1 bis C_3 so festlegen, dass $\underline{v}_{U.ges}$ bis zur unteren Nutzfrequenz auf nicht weniger als das 0,707-fache absinkt.
- Kontrolle der Verlustleistungen,
- Kontrolle über die gesamten Toleranzbereiche, ...

1.7 Operationsverstärker

Frequenzgang eines Operationsverstärkers

$$\underline{v}_0 = v_{00} \cdot \frac{1}{1 + j \cdot \frac{f}{f_0}} = \frac{1}{\frac{1}{v_{00}} + j \cdot \frac{f}{f_T}}$$

v_{00} – Verstärkung für niedrige Frequenzen; f_0 – Grenzfrequenz; $f_T = v_{00} \cdot f_0$ – Transitfrequenz.

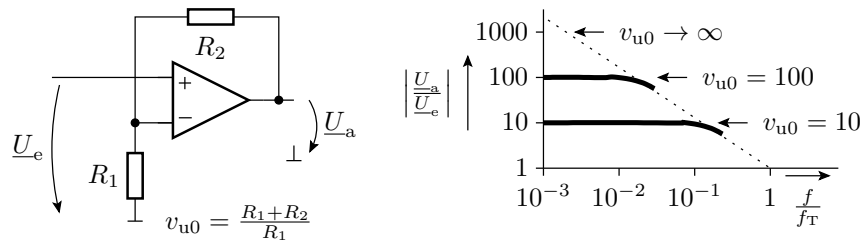
Idealer Operationsverstärker $v_{00} \rightarrow \infty$:

$$\lim_{v_{00} \rightarrow \infty} (\underline{v}_0) = -j \cdot \frac{f_T}{f}$$

Nur mit Rückkopplung haben Schaltungen mit Operationsverstärkern einen linearen Arbeitsbereich⁴. Der nutzbare Frequenzbereich hängt von der Transitfrequenz und der Rückkopplung ab.

⁴Voraussetzung für die Schaltungsanalyse im Frequenzbereich.

Nicht invertierender Verstärker



$$U_a = v_{u0} \cdot \left(U_e - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot U_a \right)$$

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{\frac{1}{v_{u0}} + \frac{R_1}{R_1 + R_2}} = \frac{1}{\frac{1}{v_{u0}} + \frac{1}{v_{u0}}} = \frac{v_{u0}}{j \cdot \frac{v_{u0} \cdot f}{f_T} + 1}$$

Die Grenzfrequenz des Verstärkers ist der Quotient aus Transitfrequenz des OV's und der eingestellten Verstärkung $f_{v0} = f_T/v_{u0}$.

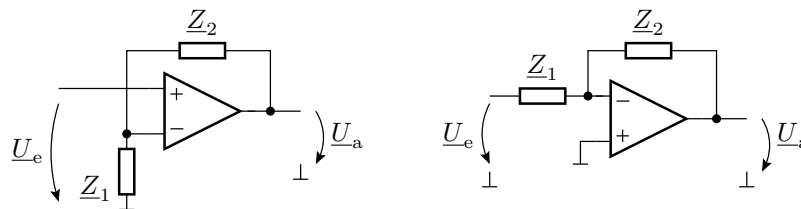
Der nutzbare Frequenzbereich von null bis zur Übergangsfrequenz der Spannungsverstärkung wird auch als Bandbreite bezeichnet.

Für mit Widerständen rückgekoppelte Operationsverstärker ist das Produkt aus Verstärkung und Bandbreite gleich der Transitfrequenz.

Ähnliches gilt auch für andere Verstärkerschaltungen.

Für Frequenzen $f \ll f_{v0}$ lässt sich der Frequenzgang durch die Rückkopplung einstellen.

Im Frequenzbereich $f \ll f_{v0}$



Verstärkung des nichtinvertierenden Verstärkers⁵:

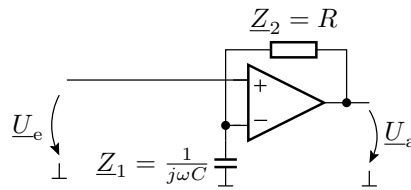
$$U_a = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1} \cdot U_e \tag{3}$$

Verstärkung des invertierenden Verstärkers:

$$U_a = -\frac{Z_2}{Z_1} \cdot U_e \tag{4}$$

⁵Vorausgesetzt, die Phasenverschiebung ändert die Rückkopplung für keine Frequenz f in eine Mitkopplung. Denn sonst schwingt die Schaltung.

Nicht invertierender Verstärker mit RC-Beschaltung



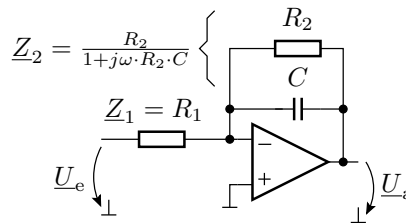
$$\underline{Z}_1 = \frac{1}{j\omega C}; \underline{Z}_2 = R$$

Übertragungsfunktion:

$$\underline{U}_a = \frac{\frac{1}{j\omega C} + R}{\frac{1}{j\omega C}} \cdot \underline{U}_e = (1 + j\omega \cdot R \cdot C) \cdot \underline{U}_e$$

$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |\underline{y}| \rightarrow \infty$ deutet auf Stabilitätsprobleme, d.h. Schwingungsneig.

Invertierender Verstärker mit RC-Beschaltung

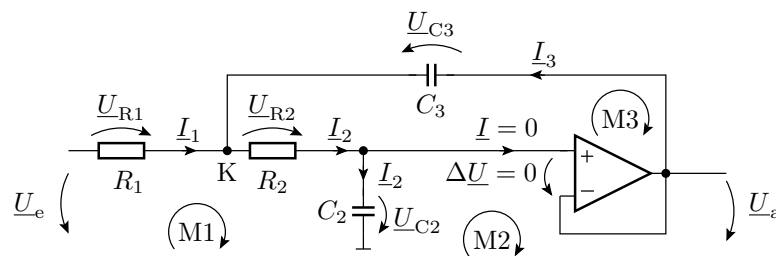


$$\underline{Z}_1 = R_1; \underline{Z}_2 = \frac{R_2}{1 + j\omega \cdot R_2 \cdot C}$$

Übertragungsfunktion:

$$\underline{U}_a = -\frac{R_2}{R_1 \cdot (1 + j\omega \cdot R_2 \cdot C)} \cdot \underline{U}_e$$

Nachbildung des RLC-Spannungsteilers



$$\begin{aligned} \text{K:} & \quad I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ \text{M1:} & \quad R_1 \cdot I_1 + \left(R_2 + \frac{1}{j\omega \cdot C_2} \right) \cdot I_2 = \underline{U}_e \\ \text{M2:} & \quad -\frac{1}{j\omega \cdot C_2} \cdot I_2 + \underline{U}_a = 0 \\ \text{M3:} & \quad -R_2 \cdot I_2 - \frac{1}{j\omega \cdot C_3} \cdot I_3 = 0 \end{aligned}$$

Auflösen nach \underline{U}_a (\underline{U}_e) durch eliminieren der 3 unbekanntenen Ströme:

$$\underline{U}_a = \frac{\underline{U}_e}{1 + j \cdot \omega \cdot C_2 \cdot (R_1 + R_2) - \omega^2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot C_2 \cdot C_3}$$

Das ist derselbe Typ von Übertragungsfunktion wie für den RLC-Spannungsteiler auf Seite 14:

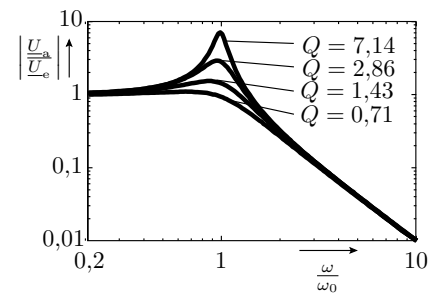
$$\underline{U}_a = \frac{\underline{U}_e}{1 + j \cdot \frac{\omega}{Q \cdot \omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt für die Resonanzfrequenz:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 \cdot R_2 \cdot C_2 \cdot C_3}}$$

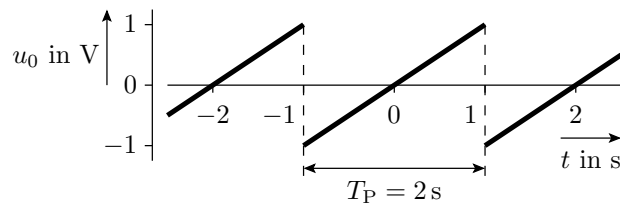
und für die Güte:

$$Q = \frac{1}{\omega_0 \cdot C_2 \cdot (R_1 + R_2)}$$



1.8 Aufgaben

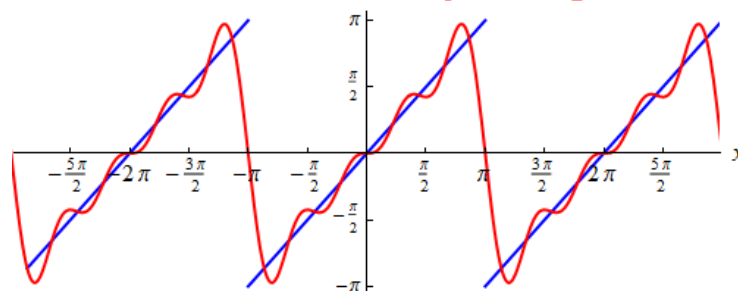
Aufgabe 7.1: Bestimmung des Spektrums



1. Suchen einer geeigneten Fourierreihe.
2. Anpassen an den gegebenen Signalverlauf.
3. Wie viele Abtastpunkte je Periode sind erforderlich, um mit einer zeitdiskreten Fouriertransformation die Spektralwerte für bis zur 4-fachen Grundfrequenz zu berechnen.
4. Bestimmen Sie die Abtastwerte und die Spektralwerte.

aus <https://www.mathe-online.at/mathint/fourier/i.html>:

$$f(x), g_4(x) = 2\sin(x) - \sin(2x) + \frac{2}{3}\sin(3x) - \frac{1}{2}\sin(4x)$$



mit $t = \frac{1\text{s}}{\pi} \cdot x$ und $u(t) = \frac{1\text{V}}{\pi} \cdot g(t)$:

$$u_4(x) = \frac{1\text{V}}{\pi} \cdot \left(2 \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{1\text{s}}\right) - \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{1\text{s}}\right) + \frac{2}{3} \sin\left(\frac{3\pi \cdot t}{1\text{s}}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{4\pi \cdot t}{1\text{s}}\right) \right)$$

- Abtastzeiten in s und Abtastwerte in V jeweils: 0, 2/9, ... 16/9
- Spektralwerte Phase $\pi/2$, Amplituden: 1 Hz: $\frac{1}{\pi}$ V, 2 Hz: $\frac{1}{2\pi}$ V, ...

Aufgabe 7.2: Imaginärer Strom?

1. Was bedeutet es physikalisch, wenn ein berechneter Strom einen Imaginärteil besitzt, z.B.:

$$\underline{I}(\omega) = (1 + j) \text{ mA}$$

2. Gibt es dann in der Schaltung imaginäre Ströme?

Lösung zu Aufgabe 7.2

1. Der komplexe Stromwert $\underline{I}(\omega) = (1 + j) \text{ mA}$ ist die komplexe Amplitude des Signals:

$$i(\omega) = (1 + j) \text{ mA} \cdot e^{j\omega t} = \sqrt{2} \text{ mA} \cdot e^{j\omega t + \frac{\pi}{4}}$$

Die Zerlegung eines reellen Signals in komplexe e-Funktionen enthält für jeden Summanden mit positiver Frequenz ω den konjugiert komplexen Summanden mit Frequenz $-\omega$, im Beispiel:

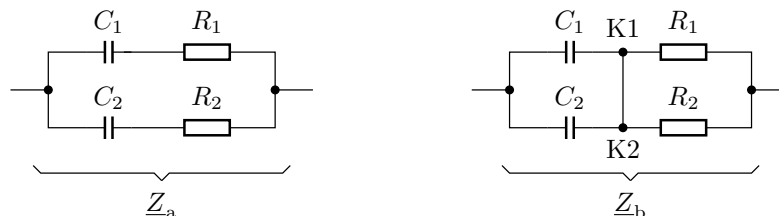
$$i(-\omega) = (1 - j) \text{ mA} \cdot e^{-j\omega t} = \sqrt{2} \text{ mA} \cdot e^{-(j\omega t + \frac{\pi}{4})}$$

Die Summe ist reel:

$$i(\omega) + i(-\omega) = 2 \cdot \sqrt{2} \text{ mA} \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

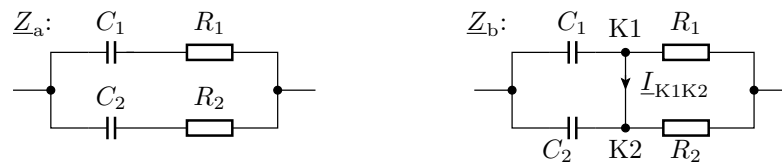
2. Imaginäre Ströme gibt es in der Rechnung, aber nicht in der Wirklichkeit.

Aufgabe 7.3: Zusammenfassen komplexer Widerstände



1. Wie groß sind die komplexen Ersatzwiderstände \underline{Z}_a und \underline{Z}_b ?
2. Unter welcher Bedingung sind die Ersatzwiderstände beider Schaltungen gleich?

Lösung zu Aufgabe 7.3



1.

$$\underline{Z}_a = \left(\frac{1}{j\omega C_1} + R_1 \right) \parallel \left(\frac{1}{j\omega C_2} + R_2 \right)$$

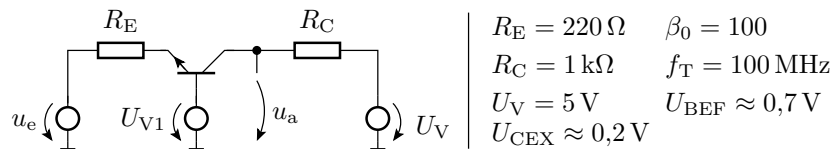
$$\underline{Z}_b = \frac{1}{j\omega (C_1 + C_2)} + R_1 \parallel R_2$$

2. $\underline{Z}_a = \underline{Z}_b$ wenn $I_{K1K2} = 0$, d.h. wenn

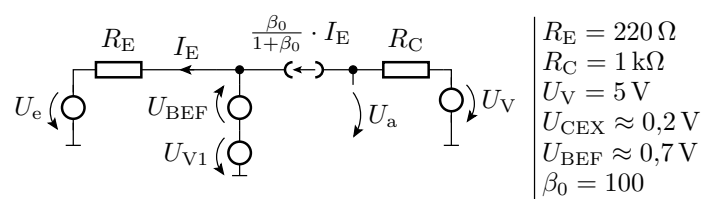
$$\frac{X_{C1}}{X_{C1} + R_1} = \frac{1}{1 + j\omega R_1 C_1} = \frac{X_{C2}}{X_{C2} + R_2} = \frac{1}{1 + j\omega R_2 C_2}$$

$$R_1 C_1 = R_2 C_2$$

Aufgabe 7.4: Grenzfrequenz und Arbeitspunkt

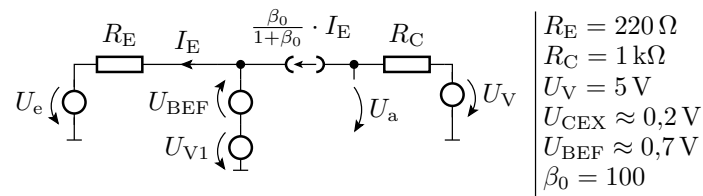


1. Stellen Sie die Ersatzschaltung für den stationären Zustand mit dem Transistor im Normalbereich auf.
2. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion für $f = 0$.
3. Wie groß ist U_{V1} zu wählen, damit die stationäre Ausgangsspannung $U_a = 3 \text{ V}$ für $U_e = 0$ beträgt?
4. Welche Amplitude darf ein kosinusförmiges Ausgangssignal maximal haben (Mittelwert 3 V)?
5. Stellen Sie die Ersatzschaltung für Frequenzen $f \neq 0$ null auf.
6. Wie groß ist die Verstärkung für Frequenzen $f \ll f_T$?
7. Wie groß ist die Grenzfrequenz der Verstärkung?

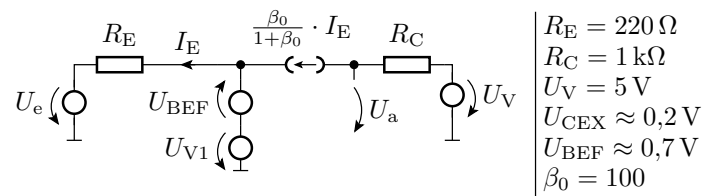


- Übertragungsfunktion für $f = 0$:
- U_{V1} , damit für $U_e = 0 \Rightarrow U_a = 3\text{ V}$:

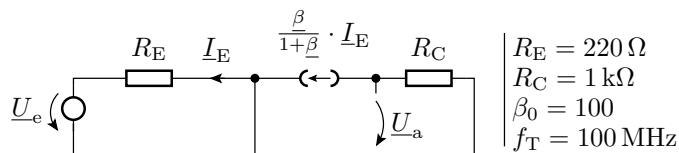
- max. Amplitude u_a :



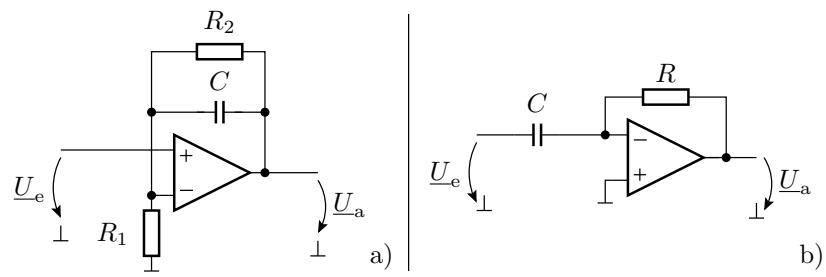
- Übertragungsfunktion für $f = 0$:
- U_{V1} , damit für $U_e = 0 \Rightarrow U_a = 3\text{ V}$:



- max. Amplitude u_a :



- Übertragungsfunktion für $f = 0$:
- Grenzfrequenz der Verstärkung:

Aufgabe 7.5: Filter mit Operationsverstärkern

Wie lauten die Übertragungsfunktionen?